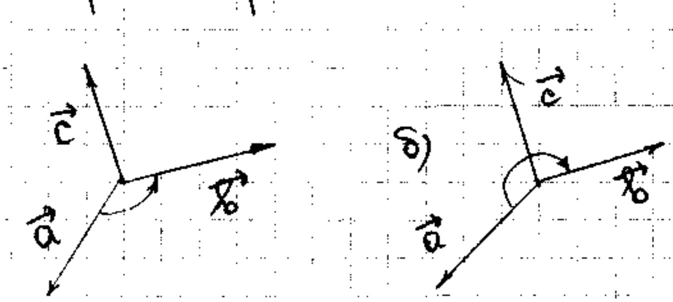
Векторное произведение векторов

Лекция 12.10.05

Правая тройка.



а) Если движение от $\vec a$ к $\vec b$ направлено против часовой стрелки, то система векторов $\vec a, \vec b, \vec c$ наз-ся правой тройкой

б) Если движение $\vec a$ к $\vec b$ напр-но по часовой стрелке → левой тройкой

$\vec a, \vec b$

$\vec a \times \vec b = \vec c$

Результат произведения 2-х векторов, удовлетворяет 3-м условиям:

1) $\vec c \perp \vec a$, $\vec c \perp \vec b$

2) длина вектора $\vec c$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec a$ и $\vec b$ как на сторонах.

$|\vec c| = |\vec a \times \vec b| = |\vec a| \cdot |\vec b| \cdot \sin\varphi$.

3) Векторы $\vec a, \vec b, \vec c$ образуют правую тройку. Из определения векторного произведения вытекают св-ва между ортами $\vec i, \vec j, \vec k$

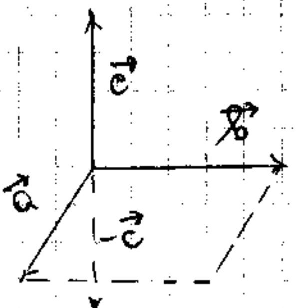
$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$

$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$

$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

Св-ва векторного произведения:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$



2). Векторное произведение обладает сочетательным св-вом относительно скалярного множителя.

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$$

Предположим $\lambda > 0$, тогда $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ будет ~~пар~~ $\perp$ векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вектор $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}$ тоже $\perp$-н векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.к. $\vec{a}$ и $\lambda \vec{a}$ лежат в одной пл-ти $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ векторы $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ и $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}$ коллинеарны и направлены в одну сторону.

Легко проверить, что у этих векторов по пункту 2) опр-я векторного произв-я численные значения тоже совпадают $\Rightarrow$ св-во 2) при $\lambda > 0$ доказано.

Аналогично док-ться случай, когда $\lambda < 0$

3) Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору.

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

Док-во:

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - коллинеарны ($\vec{a} \parallel \vec{b}$), тогда угол между этими векторами равен 0° или 180°, но в этом случае $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{0}$

Наоборот: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Очевидно, что $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi = 0$, но т.к. исключены случаи нулевых векторов $\Rightarrow \sin\varphi = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi = 0$ или $180° \Rightarrow$ векторы коллинеарны.

4) Векторное произведение обладает распределительным св-вом.

$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ Д/з док-ть самостоят-но

Выражение векторного произведения через координаты

	$\vec i$	$\vec j$	$\vec k$
$\vec i$	$\vec 0$	$\vec k$	$-\vec j$
$\vec j$	$-\vec k$	$\vec 0$	$\vec i$
$\vec k$	$\vec j$	$-\vec i$	$\vec 0$

Пусть имеем 2 вектора $\vec a$ и $\vec b$

$\vec a\{a_x; a_y; a_z\}$

$\vec b\{b_x; b_y; b_z\}$

$$\vec a \times \vec b = (a_x\vec i + a_y\vec j + a_z\vec k)\times(b_x\vec i + b_y\vec j + b_z\vec k) =$$

$$= a_x b_x \vec 0 + a_x b_y(+\vec k) + a_x b_z(-\vec j) + a_y b_x(-\vec k) +$$

$$+ a_y b_y \vec 0 + \cancel{a_z}\, a_y b_z \vec i + a_z b_x j + a_z b_y(-\vec i) +$$

$$+ a_z b_z \vec 0 \Rightarrow$$

$$i(a_y b_z - a_z b_y) + j(a_z b_x - a_x b_z) + k(a_x b_y - a_y b_x) =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (1)$$

Формула (1) даёт выражение векторного произведения через координаты.

Некоторые приложения векторного произведения.

1) Коллинеарность векторов.

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда (где $a\{a_x, a_y, a_z\}$; $b\{b_x; b_y; b_z\}$) когда $\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda$$

Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

2). Нахождение площадей ~~для~~ треугольника и параллелограма.

$$S_{▱} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$$

Смешанное произведение 3-х векторов.

Под смешанным произведением 3-х векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ понимается следующая операция

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \text{скаляр}$$

Св-ва смешанного
произведения векторов.

1). Смешанное пр-е векторов не меняется при циклической перестановке его сомножителей.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (b\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$$

Док-во очевидно, т.к. в этом случае не изменится объём параллелепипеда, построенного на этих 3х векторах и ориентация его рёбер. (геометр-ий смысл смешанного пр-я 3-х векторов означает объём параллелепипеда, построенного на 3-х векторах)

2) Смеш-е пр-е 3-х в-ов не изменится, если заменить местами знаки векторного и скалярного умножения.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{b})\times\vec{c}$$, т.к.

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ равно $\pm V$ (объем параллелепипеда); $(\vec{a}\cdot\vec{b})\times\vec{c} = \pm V$, причём векторы $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$ одной ориентации.

3) См-е пр-е 3-х в-ов меняет свой знак при перемене мест любых двух векторов.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$$

4) См-е пр-е 3-х в-ов равно 0 тогда и только тогда, когда они компланарны (лежат в одной пл-ти).

Док-во:

Допустим это не так, тогда
$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \pm V$, но в этом случае у нас см-е пр-е не равно нулю, а это противоречит условию см-го пр-я, равного нулю => предположение о том, что $V \neq 0$ было неверно.

Обратно: пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, тогда $\vec{d} = (\vec{a}\times\vec{b})$ будет перпендикулярен пл-ти, в кот-ой лежат $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ $\Rightarrow \vec{d}\perp\vec{c} \Rightarrow$ ск-е пр-е $\vec{d}\bullet\vec{c} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 0$.

Выражение смешанного пр-я векторов через координаты.

$\vec{a}\{a_x, a_y, a_z\}$

$\vec{b}\{b_x, b_y, b_z\}$

$\vec{c}\{c_x, c_y, c_z\}$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot(c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Формула (2) даёт выражение смеш-го пр-я в координатах.

Некоторое приложение смешанного произведения:

1) Если см-е пр-е 3-х в-ов $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} > 0$, то векторы образуют правую тройку;

если $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}<0$ → левую тройку.

2) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$

3). V параллелепипеда, построенного на 3-х в-рах $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ есть модуль смешанного произведения этих векторов, а V треугольной пирамиды, построенной на этих векторах равен

$V_{\text{тр. пир}}=\frac{1}{6}\,|V_{\text{параллелепипеда}}|$

Линейная зависимость векторов. Базис.

Система векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\dots\vec{a}_k$ наз-ся линейно-зависимой, если

$\underline{\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\alpha_3\vec{a}_3+\dots+\alpha_k\vec{a}_k=0}$ (1),

причем хотя бы одно из $\alpha\neq 0$, тогда система наз-ся лин-о-зависимой

Если имеет место равенство (1), только при условии, что $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\dots=\alpha_k=0$, то $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots\vec{a}_k$ наз-ся линейно независимыми.

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i a_i=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\dots+\alpha_k\vec{a}_k=0$$

Если несколько в-ов линейно-зависимы, то хотя бы один из этих в-ов можно представить в виде линейной комбинации остальных

$$\alpha_1\vec{a_1} = -\alpha_2\vec{a_2} - \alpha_3\vec{a_3} - \dots - \alpha_k\vec{a_k}$$

$$\vec{a_1} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a_2} - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\vec{a_3} - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1}\vec{a_k}$$

Лекция 19.10.

Теорема 1.

Всякие 3 вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ на плоскости линейно зависимы

1) Среди данных векторов имеется пара векторов коллинеарных (пусть $\vec{a} \parallel \vec{b}$). Тогда $\Rightarrow$ $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, где $\lambda > 0$ или $\lambda < 0$

$\vec{a} = \lambda\vec{b} + 0\cdot\vec{c}$

Т.е. мы получили, что $\vec{a}$ - есть линейная комбинация векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$

$\Downarrow$

3 вектора будут линейно зависимые

2) Пусть среди данных в-ов $\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$ нет ни одной пары коллинеарных в-ов. Будем считать, что все 3 вектора имеют общее начало (т. O). Покажем, что вектор $\vec{a}$ можно представить в виде суммы 2-х в-ов, один из кот.-х коллинеарен $\vec{b}$ или $\vec{c}$. Через конец (т. H) $\vec{a}$ проведём прямые, $\parallel$-е векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$. До их пересечения соответственно в точках B и C с прямыми, на кот-х соответственно расположены $\vec{b}$ и $\vec{c}$, тогда

имеем равенство:

$$\vec{OM} = \vec{OB} + \vec{OC}$$

Т.к. векторы $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$ - коллинеарны векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} \vec{OB} &= \lambda_1 \vec{b} \\ \vec{OC} &= \lambda_2 \cdot \vec{c} \end{aligned} \Rightarrow \vec{a} = \lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c}$$

Теорема 2.

Для того чтобы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были линейно независимы необходимо и достаточно чтобы они были неколлинеарны.

~~Из теоре~~

Из теорем 1 и 2 следует что max-е число линейно независимых в-ов на пл-ти $=2$.

В пр-ве $=3$

Теорема 3.

Всякие 4 в-ра $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ в пр-ве линейно зависимы.

Док-во:

Пусть данные векторы исходят из одной точки.

Возможны 2 случая:

1) Среди данных в-ов существует 3 компланарных в-ра (лежат в одной пл-ти — $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$)

Т.к. 3 в-ра лежат в 1 пл-ти, то по теореме 1, один из этих в-ов линейно выражается через 2 других.

$\vec{a} = \lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c}$

Тогда в этом случае для всех в-ов имеем равенство:

$\vec{a} = \lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c} + 0 \cdot \vec{d}$

$\Rightarrow$ 4 вектора — линейно зависимы.

2) Пусть среди данных в-ов нет ни одной тройки компланарных в-ов. Тогда в этом случае в-ор $\vec{a}$ может быть представлен в виде суммы 3-х в-ов, коллинеарных $\vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$. Для этого, проводя через т. M (конец $\vec{a}$) соответственно ‖-е 3-м плоскостям, определенным парам в-ов $\vec{b}$ и $\vec{c}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$, $\vec{d}$ и $\vec{b}$, получим параллелепипед, у кот-го диагональ — есть именно $\vec{a}$, тогда $\vec{a}$ (диагональ) есть сумма 3-х коллинеарных в-ов

$\vec{a} = \lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c} + \lambda_3 \vec{d}$ (1)

$\Rightarrow$ 4 в-ра лин-о-зависимы

Базис на пл-ти и в пр-ве. Афинные координаты.

Определение

Базисом на пл-ти наз-ся 2 любых линейно независимых вектора

Базисом в пр-ве наз-ся 3 любых линейно независимых в-ра.

Кол-во линейно независимых в-ов наз-ся размерностью этого пр-ва

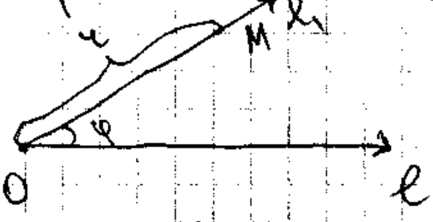
В разложении (1) числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ наз-ся Афинными координатами $\vec{a}$ в пр-ве.
$M(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$

В прямоуг-ой трехмерной системе координат векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ перпендикулярны.

Систему в-ов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ называют декартовым ортогональным базисом на пл-ти.

Полярные Координаты.
Преобразование координат.

Рассмотрим на пл-ти ось l



ℓ – полярная ось; т. O (начало) полюс
Возьмём любую т. M.

Ось, начинающ-ся в т. O и проходящая через т. M назовём ℓ_1

Т. M х-руется φ и ρ.

Тем самым мы ввели полярную систему координат.

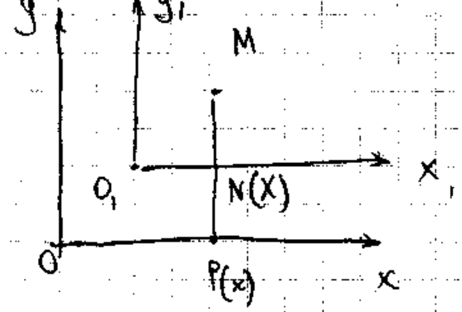
$M(\varphi, \rho)$

$\rho = \rho(\varphi)$

Множество точек M с координатами φ и ρ определить некоторую область на пл-ти, кот-я и будет являться выражение заданной ф-ии в полярных координатах.

Преобразование координат:

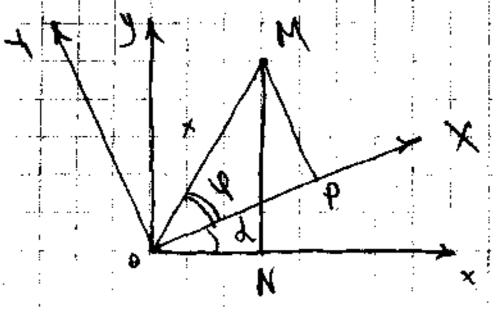
1) Параллельный перенос



$$x = X + x_0$$
$$y = Y + y_0$$

В новой системе координат все выражается через старые координаты.

2) Поворот осей координат.



$$\begin{cases} x = r\cos(\alpha+\varphi) \\ y = r\sin(\alpha+\varphi) \end{cases}$$

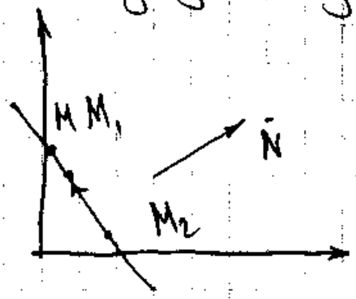
$$x = (r\cos\varphi)\cos\alpha - (r\sin\varphi)\sin\alpha = X\cos\alpha - Y\sin\alpha$$

$$y = (r\cos\varphi)\,\sin\alpha - (r\sin\varphi)\cos\alpha = X\sin\alpha + Y\cos\alpha$$

Прямая линия на пл-ти.

Нормальный в-ор прямой на пл-ти.

Ур-е прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору.



$\overrightarrow{M_2M_1}$

$\vec{N}$ - нормальный в-ор прямой; он $\perp$-к $\overrightarrow{M_2M_1}$

Пусть т. $M \in l$; т.к. в-ор $\vec{N} \perp \overrightarrow{M_1M}$, а

$\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j}$

Скалярное произведение $\vec{N}$ и $\overrightarrow{M_1M} = 0$

$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1\}$

$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 \quad (1)$

Ур-е (1) наз-ся ур-ем прямой, проходящей через данную точку M_1 перпендикулярна данному вектору

т. $M_1(-1; 3) \perp N = 2i - 5j$

$2(x+1) - 5(y-3) = 0$

$2x - 5y + 17 = 0$

Общий вид ур-я прямой на пл-ти.

$Ax + By + C = 0$

Ур-е прямой „в отрезках"

$Ax + By = -C$

$$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1$$

$$\frac{x}{\underbrace{-\frac{C}{A}}_{a}} + \frac{y}{\underbrace{-\frac{C}{B}}_{b}} = 1.$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (2)$$

Ур-е (2) наз-ся ур-м прямой „в отрезках"

Ур-е прямой через 2 точки.

$M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2; y_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad (3)$$

(3) → ур-е прямой, проходящей через точки M_1, M_2

Ур-е прямой с угловым коэффициентом k.

$$By = -Ax - C$$

$$y = \underbrace{\left(-\frac{A}{B}\right)}_{k} x \underbrace{\left(-\frac{C}{B}\right)}_{b} = kx + b \quad (4)$$

Пусть имеем 2 прямые

$$y_1 = k_1 x + b_1$$

$$y_2 = k_2 x + b_2$$

Угол между двумя прямыми $= \varphi$.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

$\perp$ $k_1 k_2 + 1 = 0$

$\parallel$ $k_1 = k_2$

совпадение $\begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$; $b_1 = b_2$

Расстояние от точки до прямой.

$M_0(x_0; y_0)$ имеем т. M_0 к прямую

$Ax + By + C = 0$

d - расстояние от т. M до прямой

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$ → нормирующий множитель.

Кривые 2-го порядка.

Ин. яз. среда.   Громова Лариса Евгеньевна

№60

1. The new computer program has a variaty of helpful appliations.

2. The new machine provides 50 percent more that the previous machine.

3. When the temperature rises the metal expands.

4. The broken contact causes the heater to do switched on and so the cucle starts again

5. Shape memory alloys to proceed many applications.

6. Silicon is the most common element on this planet.

A transistor consists of two types of silicon.

Неопределенные и определенные

артикли.

сущ. 2 вида

опр. неопр.

(one) перевод один, какой-то и употр. в классиф. функции.

The only sensible ~~solution~~ solution in the Middle East is a peace which would withdraw israeli troops.

на русский язык нат. признак может быть выражен опред. предлож. такой, такого вида.

Единственное благоразумное решение проблемы Ближнего Востока это такой мир который бы вывел Израильские войска.

Употр. перед собств. сущ. имя, фамилия, географ. название и переводится словом какой-то

He was introduced to a Mr. Black.

Может употребляться в устойчивых выражениях.

It's a deal - договорились

in a few words - в нескольких словах
as a result - в результате
it is a pity - жаль
it is a pleasure - приятно
in a word.

Определенный артикль „the"
Произошел от указ. мест. „that".
Переводится при необходимости
указательным местоимением.

This is the device that was
improved in our laboratory.
Это то устройство которое было
усовершенствовано в нашей лаборатории.

The soon, the better, the great,
the higher.

The greater the strimlining the
higher will be velocities at which
no cavitation is observed.

Чем лучше обтекаемость тем лучше (выше)
скорости при кот. кавит. не наблюд.

on the whole - в конце концов

in the words of - говоря словами кого

on the one hand - с одной стороны

the long and the short of it -
короче говоря (одним словом).

to keep the house - сидеть дома

Упр. 69

Лексика 71 упражн.