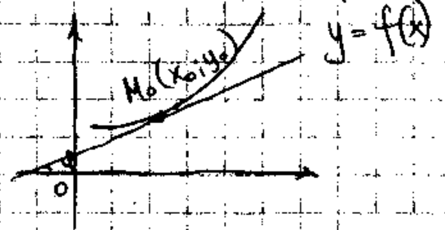
Ур-е касательной и нормали к кривой



$k = y' = \operatorname{tg}\varphi$ k – угловой коэффициент касательной.

$y = k_1 x + b_1$ $\quad \perp \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2} \Leftrightarrow 1 + k_1 k_2 = 0$

$y = k_2 x + b_2$ $\quad \parallel \Rightarrow k_1 = k_2$

$y_{кас} = y + y'(x_0)(x - x_0)$

$y_{нормали} = y_0 - \frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$

$y = \operatorname{tg} x$ $\quad x_0 = \frac{\pi}{4}$

$y_0 = 1$

$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$

$y_{кас} = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2x + 1 - \frac{\pi}{2}$

$y_{норм} = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\pi}{8}$

Лекция 18.10.

Производная ф-ии, заданной параметрически

$$\left.\begin{array}{l} y = y(t) \\ x = x(t) \end{array}\right\} \; t \in [T_0; T_1]$$

$$\begin{array}{l} y = \sin t \\ x = \cos t \end{array} \quad t \in [0; 2\pi]$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\boxed{y' = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}} \quad (1)$$

$$y'(x) = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Производная высших порядков

$y = f(x)$

1) $y' = f'(x)$

2) $y'' = f''(x)$

3) $y''' = f'''(x)$

...

n) $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$

Формула Лейбница

только для произведения 2-х ф-ий $(U \cdot V)$

$$(U\cdot V)^{(n)} = U^{(n)} + n\cdot U^{(n-1)}V' + \frac{n(n-1)}{2!}U^{(n-2)}V'' + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}U^{(n-3)}\cdot$$

$$\cdot V''' + \ldots + V^{(n)} \quad (2)$$

Док-во:

$y = U\cdot V \qquad y' = U'V + UV'$;

$$y'' = U''V + U'V' + U'V' + UV'' =$$

$$= U''V + 2U'V' + UV''$$

$$y''' = U'''V + U''V' + 2U''V' + 2U'V'' + U'V'' + UV''' =$$

$$= U'''V + 3U''V' + 3U'V'' + UV'''$$

Заключаем, что для производной n-го порядка имеет место формула (2)

Метод математической индукции.

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

1) $n = 1$;

$$(\sin x)' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

2) Предположим, что утверждение верно при $n = k$

3) Тогда докажем что утверждение верно

Если [illegible] имеет место, то утверждение [illegible] математической индукции.

Содержание этих 3-х пунктов и есть метод математической индукции

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\sin x)'' = -\sin x = \sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\sin x)''' = -\cos x = \sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

. . . .

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Аналогично имеет место следующая формула:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

Очевидно, что конечно же имеют место и следующие формулы.

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$

$$(C \cdot u)^{(n)} = C \cdot u^{(n)}$$

Пример:

$$y = \sin 2x \cdot x^3 \qquad y^{(n)} - ?$$

$$u = \sin 2x \; ; \quad v = x^3$$

$$u' = 2\cos 2x \qquad v = 3x^2$$

$u'' = -4\sin 2x \qquad v'' = 6x$

$u''' = -8\cos 2x \qquad v''' = 6$

$u'''' = 16\sin 2x \qquad v^{(IV)} = v^{(V)} = \ldots = 0.$

$$(\sin 2x \cdot x^3)^{(n)} = 2^n \sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right) + n\, 2^{n-1} \sin\left(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) \cdot 3x^2 + 2^{n-2}\frac{n(n-1)}{2!} \sin\left(2x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right) \cdot 6x + \frac{2^{n-3} n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \sin\left(2x + (n-3)\frac{\pi}{2}\right) \cdot 6$$

Механический смысл производной 2-го порядка.

ускорение прямолинейного движения точки по времени.

~~Леонард~~

Теорема об инвариантности формы диф-ла первого порядка

Пусть имеем ф-ю $y = f(x)$; $x = \varphi(t)$.

y - явл-ся сложной ф-й от переменной t, т.е. $y = f(\varphi(t))$, тогда $dy = f'(x) \cdot \underbrace{\varphi'(t)\, dt}_{= dx}$

Тем самым доказана следующая теорема диф-л сложной ф-ии $y = f(x)$, для кот. $x = \varphi(t)$ имеет такой же вид $dy = f'(x)\,dx$, как и в случае, когда аргумент x явл-ся независимой переменной.

Это св-во диф-ла наз-ся инвариантностью формы диф-ла.

Диф-лы высших порядков.

$y = f(x)$

$dy = f'(x)\,dx$

$d^2y = d(dy)$

$d^3y = d(d^2y)$

$d^ny = d(d^{n-1}y)$

Производная высших порядков от неявных ф-й.

Замечание: при просчёте производных высших порядков от ф-й, заданных неявно, результат должен быть выражен через x и y.

$x^2 + y^2 = R^2$

$y' = -\frac{x}{y}$

$2x + 2y \cdot y' = 0$

$1 + (y')^2 + y \cdot y'' = 0$

$y'' = -\frac{1 + (y')^2}{y} = -\frac{1 + \frac{x^2}{y^2}}{y} =$

$= -\frac{x^2 + y^2}{y^3}$

$y'' = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}$

Производная высших порядков для ф-й, заданных параметрически.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$t \in [T_0, T_1]$.

$$y''_{xx} = y''_{x^2} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t =$$

$= \cancel{\dfrac{y''_t x'_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^3}}$ → ~~формула, по кот. считается производная 2-го порядка.~~

$$= \frac{y''_{t^2}\, x'_t - y'_t \cdot x''_{t^2}}{(x'_t)^3}$$

$$y''_{x^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}\,; \quad y'''_{x^3} = \frac{(y''_{x^2})'_t}{x'_t}$$

Найти 2-ю производную:

$x = \sin^2 t \qquad y = \sin 2t$

$$y'_x = \frac{2\cos 2t}{\sin 2t} = 2\,\mathrm{ctg}\,2t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''_{x^2} = \frac{(2\,\mathrm{ctg}\,2t)'}{\sin 2t} = \frac{-\frac{4}{\sin^2 2t}}{\sin 2t} = -\frac{4}{\sin^3 2t}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\left(-\frac{4}{\sin^3 2t}\right)'_t}{\sin 2t} = -\frac{(-3)\sin^{-4} 2t \cdot \cos 2t \cdot 2}{\sin 2t}$$

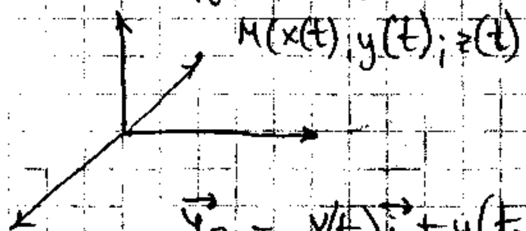
$= \cancel{\ldots} - 24 \cos 2t$

Векторная ф-я скалярного аргумента и её производная

Пусть имеем 3 ф-ии: $x = x(t)$
$y = y(t)$
$z = z(t)$

$t \in [T_0, T_1]$, $t = t_0$ $x(t_0), y(t_0), z(t_0) \to M(x_0, y_0, z_0)$
$x(t_0) \downarrow x_0$, $y(t_0) \downarrow y_0$, $z(t_0) \downarrow z_0$

Соединим начало координат в пр-ве с точкой $M(x(t), y(t), z(t))$



$$\vec{r_0} = x(t_0)\vec{i} + y(t_0)\vec{j} + z(t_0)\vec{k}$$

$$\vec{OM} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$\vec{r}$ наз-ся вектором ф-ии при $t \to t_0$, если $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x(t_0)$

$$\lim_{t \to t_0} y(t) = y(t_0)$$

$$\lim_{t \to t_0} z(t) = z(t_0)$$

что $\vec{r_0} = \lim\limits_{t \to t_0} r(t)$

Очевидно, что $r'(t)$ будет равен
$r'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$

Это следует из равенства

$$r'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \vec{i} +$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \vec{j} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \vec{k}$$

Основные теоремы диф-го исчисления. Лекция 25.10.

1. Теорема Ферма.

Пусть ф-я $y = f(x)$ определена на интервале (a, b) и принимает в некоторой точке $x = c$, принадлежащей инт-лу (a, b), наибольшее или наименьшее значение. В таком случае если в точке $x = c$ существует производная этой ф-ии, то она равна нулю.

Док-во.

Пусть $f(c) = M$ (наибольшее значение).
Для этого выпишем значение производной в т. с

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

Т.к. в т. с ф-я принимает наибольшее значение, то для любого Δx имеем нер-во: $f(c) \geq f(c+\Delta x)$

Рассмотрим 2 случая:

1) $\Delta x > 0 \Rightarrow \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$

$f'(c) < 0$

2) $\Delta x < 0 \Rightarrow \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$

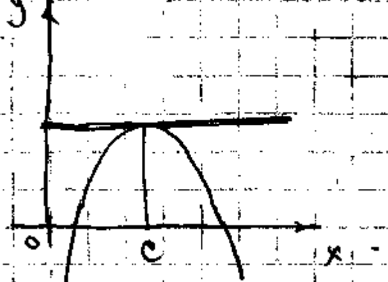
$$\Downarrow$$

$f'(c) \geq 0$

$$\Downarrow$$

$$\underline{f'(c) = 0}$$

Геометрический смысл теоремы Ферма



$f'(c) = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\angle \text{кас}, Ox)$

угол между касательной и осью Ox

Теорема Ролля.

Если ф-я $y = f(x)$ непрерывна на сегменте (отрезке) $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b), на концах сегмента обращается в 0, тогда существует хотя бы одна внутренняя точка, производная кот-й равна 0 (нулю)

Док-во:

Т.к. ф-я непрерывна на $[a, b]$, то на

этом сегменте ф-я принимает своё наибольшее значение M и наименьшее значение m. 1) Если $M = m$, то эта ф-я будет постоянна на $[a, b]$ и следовательно её производная на всём сегменте $= 0$.

2) Пусть $M \neq m$, тогда одно из чисел M или m не равно нулю ~~поэтому есть~~ Пусть $M \neq 0$, поэтому есть наибольшее значение M $\Rightarrow$ существует такая точка c, что $f(c) = M$, но т. $c \in (a, b)$ (т.к. $M \neq 0$). Тогда по теореме Ферма $f'(c) = 0$

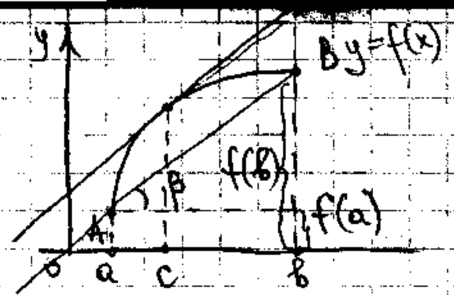
Геометрически теорема Ролля поясняется графиком непрерывной ф-ии на отрезке $[a, b]$ и дифф-ой на (a, b), кот. пересекает ось Ox в двух точках ($x = a$, $x = b$). Причём между этими точками найдётся хотя бы одна т. c ($c \in (a, b)$) в кот-й касательная к графику ф-ии $y = f(x)$ параллельна оси Ox.

Теорема Лагранжа.

Пусть ф-я непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), тогда на интервале (a, b) найдётся хотя бы одна точка c, такая что имеет место равенство:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \qquad (1)$$

Док-во:



Напишем ур-е хорды AB, воспользовавшись для этого ур-ем прямой, проходящей через 2 данные точки

$A(a; f(a))$
$B(b; f(b))$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \Rightarrow \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{x-a}{b-a}$$

Отсюда получаем что $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

$f(x) = f(x) - [y] = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$

Введём ф-ю $F(x) = f(x) - y$ (2) (1')

~~определённая формулой 1' удовлетворяет 3-м условиям теоремы Ролля.~~

~~на [a, b], т.к. на этом отрезке непрерывны ф-ии f(x) и x−a~~

2) Производная

Ф-я $F(x)$ определённая формулой (2) удовлетворяет всем 3-м условиям теоремы Ролля:

1) $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$, т.к. непрерывны на $[a, b]$ ф-ии $f(x)$ и $(x-a)$

2) Ф-я $F(x)$ дифференцируема на интервале (a, b)

т.к. $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ (3)

$F'(x)$ дифференцируема на (a, b), т.к. на этом интервале существует $f'(x)$ по условию теоремы.

3) $F(a) = f(a) - f(a) - 0 = 0$

$F(b) = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0$

$F(a) = F(b)$ – верно.

$\Downarrow$

$F(x)$ удовлетворяет всем 3-м условиям теоремы Ролля, тогда на основании формулы (3) имеем, что $F'(c) = 0$

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Замечание: формулу (1) чаще всего пишут в виде

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \quad (4)$$

Формула (4) наз-ся формулой Лагранжа конечных ~~превращений~~ приращений

Пример.

$f(x) = x^4$ $[0; 1]$, $0 = a$, $1 = b$

Определить значение x, при котором касательная к графику параллельна хорде, стягивающей концы дуги графика

$f(b) = f(1) = 1$

$f(a) = f(0) = 0$.

По формуле (4):

$1 - 0 = 4c^3(1 - 0)$

$4c^3 = 1$.

$c = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \approx 0{,}63$

Теорема

Если ф-я $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет во всех его внутренних точках производную $f'(x) = 0$, то эта ф-я постоянная.

Док-во: $f'(c) = 0$ следует из формулы (4)

Следствие: Если производная 2-х ф-ий $\varphi(x)$ и $f(x)$ равны во всех точках сегмента $[a, b]$, то разность ф-й постоянна.

Док-во:

$\varphi'(x) = f'(x)$

$\Omega(x) = \varphi(x) - f'(x)$

$\Omega'(x) = 0$